I.S.F.A. Université Lyon 1 Année 2009.

Concours d'Entrée

Deuxième épreuve de mathématiques

Durée 4h.

OPTION A

Le sujet est composé d'un problème comportant 3 parties.

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Convexité dans $\mathbb{R}^n$

La première partie de ce problème porte sur les ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$ (définitions, propriétés). La deuxième partie est consacrée aux fonctions convexes de $C \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. La troisième partie fournit quelques exemples et applications.

On pourra utiliser les résultats classiques sur les fonctions convexes d'une variable (i.e. définies sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$), en explicitant soigneusement les résultats utilisés.

A. Ensembles convexes.

Pour $\|\cdot\|$ une norme de $\mathbb{R}^n$, B est une boule pour cette norme s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ tels que

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \|x - x_0\| \leq r\}$$

la sphère correspondante est

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \|x - x_0\| = r\}.$$

Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est *convexe* si pour tout $x, y \in C$ et $t \in [0,1]$,

$$tx + (1-t)y \in C.$$

On appelle *combinaison linéaire convexe* des points x_i, $i = 1, \ldots, k$ toute combinaison linéaire $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} t_i x_i$ avec $t_i \in [0,1]$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$.

0. Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ ci-dessous, lesquels sont convexes ?

i) B une boule pour une norme de $\mathbb{R}^n$,

ii) S une sphère pour une norme de $\mathbb{R}^n$,

iii) pour $u \in \mathbb{R}$, $\mathcal{H}_u = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1 + \cdots + x_n = u\}$.

1.a Montrer qu'un ensemble convexe est stable par combinaison linéaire convexe.

1.b Montrer qu'un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe.

1.c Montrer que toute intersection d'ensembles convexe et convexe.

1.d Montrer que l'adhérence d'un ensemble convexe est convexe.

1.e Montrer que l'intérieur d'un ensemble convexe est convexe.

2. Étant donné un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^n$, on appelle *enveloppe convexe* de A l'intersection de tous les ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$ qui contiennent A, on note $\mathrm{Cv}(A)$ l'enveloppe convexe de A. Montrer que $\mathrm{Cv}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires convexes des points de A.

3. Soit C un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$, $x \in C$ est un *point extrémal* de C si $C \setminus \{x\}$ est convexe.

3.a Montrer que $x \in C$ est un point extrémal de C si et seulement si :
$\exists t \in]0,1[$, $\exists y, z \in C$ tels que $ty + (1-t)z = x \Longrightarrow \ y = z = x$.

3.b Si $\|\cdot\|$ désigne la norme Euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et B une boule pour cette norme, quels sont les points extrémaux de B ?

Si $\|x\|_\infty = \displaystyle\max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$ et si B_∞ désigne une boule pour cette norme, quels sont les points

extrémaux de B_∞ ?
3.c On appelle *simplexe* tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de $\mathbb{R}^n$.
Montrer qu'un simplexe est compact. Quels sont les points extrémaux d'un simplexe ?
4. Soit C un compact convexe de $\mathbb{R}^n$, montrer que l'ensemble des points extrémaux de C est non vide.
Indication : on pourra commencer par montrer que pour tout $a \notin C$ il existe $b \in C$ tel que

$$\forall x \in C \quad \|a - x\| \leq \|a - b\|,$$

pour $\|\cdot\|$ la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

B. Fonctions convexes

Une fonction f définie sur un convexe $C \subset \mathbb{R}^n$,

$$f \; : \; C \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une *fonction convexe* si et seulement si pour tout $x, y \in C$ et $t \in [0,1]$,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

La fonction f est *strictement convexe* si et seulement si elle est convexe et
$\exists t \in]0,1[, \exists x, y \in C$ tels que $f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y) \Longrightarrow x = y$.
1.a Soit C un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie sur C, on note :

$$F_f = \{(x, \lambda) \in C \times \mathbb{R} \; / \; f(x) \leq \lambda\} \text{ et}$$

$$E_f = \{(x, \lambda) \in C \times \mathbb{R} \; / \; f(x) < \lambda\}.$$

Montrer que f est convexe si et seulement si les ensembles F_f et E_f sont des ensembles convexes de $\mathbb{R}^{n+1}$.
1.b Soit $(f_i)_{i \in D}$, une famille quelconque de fonctions convexes sur C, ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$, telle que pour tout $x \in C$,

$$\sup_{i \in D} f_i(x) < +\infty.$$

Montrer que $f = \sup_{i \in D} f_i$ est une fonction convexe sur C.
2. Version discrète de l'inégalité de Jensen
Soit f une fonction convexe sur un ensemble convexe $C \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que pour tout $x_1, \ldots, x_k \in C$ et $t_1, \ldots, t_k \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} t_i f(x_i).$$

Si f est strictement convexe, montrer que

$$\exists t_i \in]0,1[\forall \; i = 1, \ldots, n \text{ et } \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \quad \text{tels que} \quad f\left(\sum_{i=1}^{k} t_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} t_i f(x_i)$$
$$\Longrightarrow \quad \forall i = 1, \ldots, n \;\; x_i = x_1.$$

3. Le but de cette question est de montrer que toute fonction convexe définie sur un ensemble convexe $C \subset \mathbb{R}^n$ est continue sur l'intérieur $\overset{\circ}{C}$ de C. On considère donc f une fonction convexe définie sur C.
On considère $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.
3.a Montrer que f est bornée sur tout simplexe inclus dans C.
3.b Soit $x_0 \in \overset{\circ}{C}$, montrer qu'il existe un simplexe inclus dans C qui contient x_0 dans son

intérieur.
Montrer qu'il existe une boule $B_1 \subset C$ centrée en x_0 et $M > 0$ tel que pour tout $x \in B_1$, $|f(x)| \leq M$.
3.c Montrer que pour tout $x \in B_1$,

$$f(x) \geq 2f(x_0) - M.$$

3.d On note 2α le rayon de la boule B_1 et on note B_2 la boule centrée en x_0 et de rayon α. Montrer qu'il existe $L > 0$ tel que pour tout $x_1, x_2 \in B_2$,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\|x_1 - x_2\|.$$

Indication : pour deux points distincts x_1 et x_2 de B_2, on pourra utiliser les points

$$x_1' = x_1 - \alpha\frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|},\ x_2' = x_2 + \alpha\frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|}.$$

3.e Conclure que f est continue sur $\overset{\circ}{C}$.
4. Montrer que si f est continue et convexe sur un simplexe C alors f atteint son maximum en un point extrémal.
5.a Montrer que f est convexe sur C ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si pour tout $x, y \in C$, la fonction

$$\begin{array}{rcccl} h_{x,y} & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & f((1-t)x + ty) \end{array}$$

est convexe.
5.b Montrer aussi que si f est convexe alors pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $x \in \overset{\circ}{C}$, la fonction

$$\begin{array}{rcccl} g_{x,h} & : & V_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & f(x + th) \end{array}$$

est convexe sur un voisinage $V_0 \subset \mathbb{R}$ de $t = 0$.
5.c En déduire qu'une fonction f définie sur un convexe ouvert C et de classe C^2 est convexe si et seulement si la matrice Hessienne $H(x, y)$ de f en (x, y) [1] est semi-définie positive [2] pour tout $(x, y) \in C$.
5.d En déduire que si f est de classe C^2 et convexe sur C un ouvert convexe alors pour que $x^\star \in C$ soit un minimum de f, il suffit que $\nabla f(x^\star) = 0$ où $\nabla f(x)$ désigne le vecteur gradient de f en x i.e. le vecteur des dérivées partielles.
6. Montrer que si f est strictement convexe sur un ensemble convexe C et s'il existe $x \in C$ tel que $f(x) = \inf\limits_{y \in C} f(y)$ alors x est le seul élément de C à réaliser le minimum de f sur C.

C. Exemples et applications

1. Parmi les fonctions suivantes définies sur $C \subset \mathbb{R}^n$, lesquelles sont convexes ?

i) $x \mapsto \|x\|$, $C = \mathbb{R}^n$, où $\|\cdot\|$ est une norme de $\mathbb{R}^n$,
ii) $x \mapsto a^T \cdot x + b$, $C = \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$. [3]
iii) $(x, y) \mapsto \dfrac{x^2}{y+1}$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > -1\}$,
iv) $(x, y) \mapsto x \ln y + y \ln x$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > 0, y > 0\}$,
v) $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto e^{x_1 + \cdots + x_n}$, $C = \mathbb{R}^n$,

[1] On rappelle que la matrice Hessienne est la matrice des dérivées partielles secondes : $H(x,y)_{i,j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x,y)$

[2] On rappelle qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semi-définie positive si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x^T \cdot M \cdot x \geq 0$, x^T désignant le vecteur ligne, transposé de x

[3] Pour A une matrice $n \times p$, A^T désigne la transposée.

vi) $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \ln(e^{x_1} + \cdots + e^{x_n})$, $C = \mathbb{R}^n$,

2 Montrer que la fonction $f(x, y) = x \ln x + y \ln y$ admet un unique minimum sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > 0,\ y > 0\}$ que l'on déterminera.

3. Montrer que la fonction f définie sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{x^2}{y+1} & \text{si } (x,y) \neq (0,-1) \\ f(0,-1) = 0 \end{cases}$$

est convexe sur D, continue sur $D \setminus \{(0, -1)\}$. Admet-elle un prolongement continu sur D ? Peut-on étendre le résultat de continuité obtenu à la question **B.3** au convexe C ?

4. Inégalités de Jensen.

4.a. Une application de la version discrète de l'inégalité de Jensen.

On considère $P = (p_1, \dots, p_k) \in \mathbb{R}^k$ et $Q = (q_1, \dots, q_k) \in \mathbb{R}^k$ tels que $p_i > 0$ et $q_i > 0$ pour $i = 1, \dots, k$ et

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = \sum_{i=1}^{k} q_i = 1.$$

On définit la *divergence de Kullback-Leibler* $D(P||Q)$ par :

$$D(P||Q) = \sum_{i=1}^{k} p_i \ln\left(\frac{p_i}{q_i}\right).$$

Montrer que $D(P||Q) \geq 0$ et que $D(P||Q) = 0$ si et seulement si $p_i = q_i$ pour tout $i = 1, \dots, k$.

Indication : on pourra commencer par montrer que $x \mapsto x \ln x$ est strictement convexe sur son ensemble de définition.

On note $\mathcal{P} = \left\{(P, Q) \in]0, 1[^k \times]0, 1[^k \ / \ \sum_{i=1}^{k} p_i = \sum_{i=1}^{k} q_i = 1\right\}$.

L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (P, Q) & \mapsto & D(P||Q) \end{array}$$

définit-elle une distance ?

4.b. Version continue I

Soit $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$, comparer $f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(\frac{k}{n})\right)$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\varphi(\frac{k}{n})\right)$ puis montrer que

$$f\left(\int_0^1 \varphi(t)dt\right) \leq \int_0^1 f(\varphi(t))dt.$$

4.c. Version continue II

On considère f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que $\int_a^b g(t)dt = 1$, et φ une fonction continue sur $[a, b]$. Montrer que

$$f\left(\int_a^b \varphi(t)g(t)dt\right) \leq \int_a^b f(\varphi(t))g(t)dt.$$

Indication : on pourra commencer par montrer cette inégalité pour φ une fonction en escalier.

4.d. Application à la *divergence de Kullback-Leibler*
Pour deux fonctions continues φ_1 et φ_2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}_\star^+$ telles que

$$\int_0^1 \varphi_j(t)dt = 1 \quad j = 1, 2,$$

on définit

$$D(\varphi_1||\varphi_2) = \int_0^1 \varphi_1(t) \ln \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)} dt.$$

Montrer que $D(\varphi_1||\varphi_2) \geq 0$.